

# ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ

6/12/2004

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ -ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιμέλεια: ΠΙΣΤΟΦΙΔΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

### Θέμα 1

Δείξτε ότι δεν υπάρχει "1-1" συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

$$f(p^x) + f(e^x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

#### Λύση

Ας ισχυρισθούμε ότι υπάρχει "1-1" συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Η σχέση της υπόθεσης για  $x=1$  δίνει:

$$f(p) + f(e) = 1 \quad (1)$$

ενώ για  $x = \ln p$  δίνει:

$$f(p^{\ln p}) + f(e^{\ln p}) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(p^{\ln p}) + f(p) = 1$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(p^{\ln p}) + 1 - f(e) = 1$$

$$\Rightarrow f(p^{\ln p}) = f(e)$$

$$\stackrel{f \text{ "1-1" }}{\Rightarrow} e = p^{\ln p} > e^{\ln p} = p \quad \text{άτοπο}$$

Άρα δεν υπάρχει "1-1" συνάρτηση που να πληρεί τα επιτάγματα του προβλήματος

### Θέμα 2

α) Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3 - 3^{1-x}$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι "1-1"

β) Αν  $z \in \mathbb{C}$  με  $z^3 \cdot 3^{|z|-1} = -1$  δείξτε ότι  $|z| = 1$

#### Λύση

α) Θεωρούμε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$

Τότε:

$$x_1^3 < x_2^3 \quad (1)$$

$$\text{και} \quad -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 3^{1-x_1} > 3^{1-x_2} \\ &\Rightarrow -3^{1-x_1} < -3^{1-x_2} \quad (2) \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} &x_1^3 - 3^{1-x_1} < x_2^3 - 3^{1-x_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \text{άρα } f \uparrow \mathbb{R} \quad \text{δηλ. } f''1-1'' \end{aligned}$$

$$\beta) \quad z^3 \cdot 3^{|z|-1} = -1 \Rightarrow z^3 = -\frac{1}{3^{|z|-1}} \Rightarrow z^3 = -3^{1-|z|}$$

$$\Rightarrow |z^3| = |-3^{1-|z|}| \Rightarrow |z|^3 = 3^{1-|z|}$$

$$\Rightarrow |z|^3 - 3^{1-|z|} = 0 \stackrel{(a)}{\Rightarrow} f(|z|) = f(1)$$

$$\begin{aligned} &f''1-1'' \\ &\Rightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$